Περιοχή Απόλυτης Ευστάθειας για RK

Γενικά γνωρίζουμε : $S = \{ z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leq 1 \}$

Η $r(z)$ είναι μια ρητή συνάρτηση και ο βαθμός αριθμητή και παρονομαστή είναι το πολύ q.

Euler : $r(z) = 1 + z$

Πεπλ. Euler : $r(z) = \dfrac{1}{1-z}$

Τραπ. ή μέσου : $r(z) = \dfrac{1+z/2}{1-z/2}$

Άμεσες μέθοδοι RK

Συνάρτηση Ευστάθειας

$$r(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^p}{p!} \quad , \text{δηλ.}$$

- η $r(z)$ είναι ένα πολ/μο Taylor βαθμού p της εκθετικής συνάρτ. e^z γύρω από το $z = 0$.
- για τις πεπλ. είναι μια συνάρτηση (ρητή) δύσκολο να εκτιμηθεί.

Θα μπορέσουμε να βρούμε περιοχή απόλυτης ευστάθειας αλλά δεν θα είναι όλο το $\mathbb{C}^-$

A-ευστάθεια : Μια μέθ. RK είναι A-ευστ. αν και μόνο αν $|r(z)| \le 1$ $\forall z$, δηλ. το $r(z)$ δεν έχει πόλους (σημεία στα οποία μηδενίζεται ο παρονομαστής.

Άρα γενικά οι μεθ. RK δεν είναι A-ευσταθής και οι άμεσες μέθοδοι RK δεν είναι A-ευσταθής.

Ερωτ : είναι οι RK A-ευστ
Απ. : όχι, αλλά γενικά υπάρχει μια περιορισμένη περιοχή απολ. ευστάθειας

ΟΡΙΣΜΟΣ.
B-ευστάθεια : Μια μέθ. είναι B-ευσταθής όταν, εάν το ΠΑΤ : $\begin{cases} y' = f(t,y) & t \ge 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

η f ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθ. του Lip δηλ. $(f(t,y) - f(t,z), y-z) \le 0$ $\forall t \in [0,+\infty)$, $\forall y, z \in \mathbb{R}$ και θεωρούμε το διακριτό ανάλογο με την μέθοδο RK ώστε

$$\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \le \|y^n - z^n\|, \forall n$$

86 δηλ. φθίνουσα ακολ. των προσεγγίσεων

Αλγεβρική Ευστάθεια για RK

Μια μέθοδος RK λέγεται αλγ. ευσταθής όταν:

$$\begin{cases} (1)\ b_i \geq 0, \quad i=1,2,\dots,q \\ (2)\ \text{Ο } q\times q \text{ πίνακας των } m_{ij} \text{ είναι μη αρνητικά ορισμένος.} \end{cases}$$

$$m_{ij} = b_i a_{ij} + b_j a_{ji} - b_i b_j$$

$$(M\bar{x}, \bar{x}) \geq 0 \quad \text{ή} \quad \sum_{i,j=1}^{q} m_{ij} x_i x_j \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^q$$

$$\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array} \qquad \begin{array}{l} A \in \mathbb{R}^{q\times q} \\ \tau^T \in \mathbb{R}^q \\ b^T \in \mathbb{R}^q \end{array} \qquad \begin{cases} y^0 = y_0 \\ y^{n,i} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \\ y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{cases}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Πρόταση: Κάθε αλγεβρικά ευσταθής μέθοδος RK είναι B-ευσταθής.

Παρατήρηση: Αν η RK δεν είναι αλγ ευσταθής τότε για την B-ευστάθεια δεν προκύπτει κάποιο συμπέρασμα.

π.χ 1 Πεπλ. Euler: $\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$

(1) $b_1 = 1 \geq 0$

(2) $m_{11} = b_1 a_{11} + b_1 a_{11} - b_1 b_1$
$= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1 \geq 0$

άρα η πεπλ. Euler είναι αλγ. ευσταθής
άρα και B- ευσταθής.

π.χ.2 Πεπλ. μεθ. του μεσου. $\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$

Εξ: ποια η μεθ. ή δινει τη μεθ.
και πρεπει να ξερω το κριτηριο
δειξτε ευστ. ακριβ.

(1) : $b_1 = 1 \geq 0$

(2) $m_{11} = b_1 a_{11} + b_1 a_{11} - b_1 b_1 = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot 1 = 0 \geq 0$

Άρα η πεπλ. μεθοδος του μέσου
είναι αλγεβ. ευσταθής αρα κ' B- ευσταθής

π.χ. 3 Μέθοδος Τραπεζίου $\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ \hline 1/2 & 1/2 & \end{array}$

(1) $b_i \geq 0$, $i = 1, 2$

β) πρεπει να υπολ 4 διαφορ. ποσότητες αφού ο πινακας ειναι 2×2.

$m_{11} = b_1 a_{11} + b_1 a_{11} - b_1 b_1 = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

$m_{12} = b_1 a_{12} + b_1 a_{21} - b_1 b_2 = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0$

$m_{21} = b_2 a_{21} + b_2 a_{12} - b_1 b_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{0}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0$

$m_{22} = b_2 a_{22} + b_2 a_{22} - b_2 b_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 1/4$

εξετάζω το $\exists$ $\rightarrow$ (πρεπει να το γράψω)

$(M\bar{x},\bar{x}) < 0$ οπου $M = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

θεωρώ το $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Άρα η μέθοδος δεν είναι αλγ. ευσταθής.

Παρατηρηση (ασκ. 3.48 βιβλίου) SOS

Δεν ξερω αν θα είναι B-ευσταθης. Πάω με τον ορισμό Αποδ. ότι δεν είναι B-ευσταθης (3.48)

$\begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1/4)x_1 \\ (1/4)x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/4\, x_1 \\ 1/4\, x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$= -1/4\, x_1^2 + \frac{1}{4} x_2^2$

Δεν είναι $\forall$ x_1, x_2 θετικά ορισμένος

Ε5

Σχιαγραφήστε το κώδικα για τη μέθοδο Euler, RK ...
(1.25 μον.)

Ασκήσεις : Θεωρούμε το ΠΑΤ : $\begin{cases} y'(t) = 1, & t\in[0,1] \\ y(0)=0 \end{cases}$

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{1}{N}$, y^N η προσέγγιση της λύσης του ΠΑΤ στο $t=1$, με την βοήθεια μιας RK μεθ. με βήμα h. Αν $y^N \to 1 = y(1)$ $N \to \infty$, ν.δ.ο. η μεθ RK είναι συνεπής. (δηλ. η RK είναι $q \geq 1 \iff \sum_{i=1}^{q} b_i = 1$)

($y^N \to 1$ δηλ συμφωνεί με την αναλυτική λύση)

Απ. : Θεωρούμε την RK με μητρώο $\begin{array}{c|c} A & c \\ \hline b^T & \end{array}$ με αρχ συνθ. $y^0 = 0$ (δίνεται απο το πρόβλ.)

τότε $y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i \underbrace{f(t^{n,i}, y^{n,i})}_{=1} \Rightarrow$

$$y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i$$

Άρα επαγωγικά θα έχουμε: $\qquad Nh = b-a = 1-0 = 1$

$$y^{n+1} = y^0 + h(n+1) \sum_{i=1}^{q} b_i$$

$$y^n = \cancel{y^0}^{\,0} + nh \sum_{i=1}^{q} b_i \Rightarrow y^n = nh \sum_{i=1}^{q} b_i$$

άρα $n=N$: $y^N = Nh \sum_{i=1}^{q} b_i \Rightarrow y^N = \sum_{i=1}^{q} b_i$

όμως $N \to \infty$ $y^N \to 1 \iff \sum_{i=1}^{q} b_i = 1$ άρα η RK συνεπής

Αριθμ Μεθοδοι

- Π.Α.Τ.
  - Μονοβ.
    - Χαμηλής τάξης
    - RK
  - Πολυβημ
- Π.Σ.Τ.
  - Πεπερ. Διαφορές (~1960)
  - Πεπερ. Στοιχείων (~1970)

Κεφ. 4ο : Πολυβηματικές Μεθοδοι

(1) ΠΑΤ $\begin{cases} y' = f(t,y), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

δουλεύω με το γνωστό προβλ. αρχ. τιμών και ζητάω τη λύση.

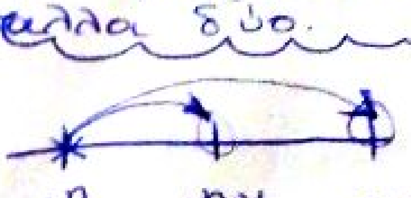
Ζητάμε δηλ. την συνάρτηση $y : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$

Θεωρούμε ομοιόμορφη διαμέριση, με βήμα $h = \frac{b-a}{N}$, όπου $t^n = a + nh$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$

Παραδ. πολυβήματης μεθ:

{δεν χρειάζομαι 1 βήμα αλλά δύο.}

$$\begin{cases} y^{n+2} - y^n = 2h f(t^{n+1}, y^{n+1}) \\ y^0, y^1 \end{cases}$$



• Άρα για τα πάνω το 1º βήμα χρειαζόμαι δύο αρχικά δεδομένα (y_0, y_1)

$$y^2 - y^0 = 2h\, f(t^1, y^1)$$

• Προκύπτει με τη βοήθεια των κεντρικών πεπερασμένων διαφορών:

$$y'(t^{n+1}) \simeq \frac{y(t^{n+2}) - y(t^n)}{2h}$$

Άρα έχω το αριθμητικό σχήμα

$$y'(t^{n+1}) = f(t^{n+1}, y^{n+1}) \overset{\text{απο κ π δ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y(t^{n+2}) - y(t^n)}{2h} = f(t^{n+1}, y^{n+1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(t^{n+2}) - y(t^n) = 2h\, f(t^{n+1}, y^{n+1})}$$

είναι δι-βηματικό

άμεση αριθμ μεθ

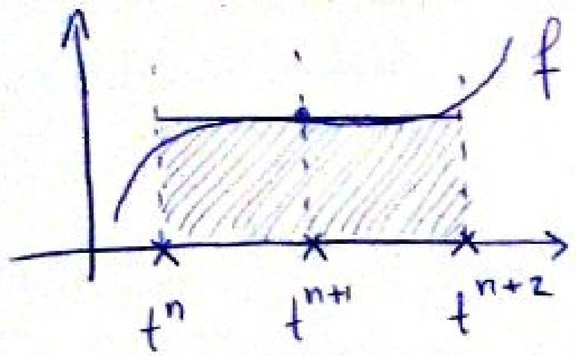
Αριθμητική ολοκλήρωση: στο διάστημα $\underbrace{[t^n, t^{n+2}]}_{2h}$

$$\int_{t^n}^{t^{n+2}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f(t, y(t))\,dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(t^{n+2}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f(t, y)\,dt = 2h\, f(t^{n+1}, y^{n+1})$$

(απο μεθ μεσου)

$\Rightarrow y(t^{n+2}) - y(t^n) = 2h f(t^{n+1}, y^{n+1})$



Κανόνας Simpson:

$$\int_c^d f(x)\,dx = \frac{d-c}{6}\left(f(c) + 4 f\left(\frac{c+d}{2}\right) + f(d)\right)$$

άρα το αριθμητικό σχήμα που παίρνω:

$$\begin{cases} y^{n+2} - y^n = \frac{h}{3}\left[f(t^n, y^n) + 4 f(t^{n+1}, y^{n+1}) + f(t^{n+2}, y^{n+2}) \right] \\ y^0, y^1, \text{ αρχ. δεδ.} \end{cases}$$

έχω μία συνθήκη και τη σπάω σε δύο αρχικά δεδομένα.

Επίλυση ενός μη γραμμ. συστήματος

Η μέθοδος είναι πεπλεγμένη

Εστω το ΠΑΤ (1), τότε μια κ-βηματική μέθοδος περιγράφεται απο $2k+2$ σταθερές $a_0, a_1, \dots, a_k$, $\beta_0, \dots, \beta_k$ και είναι:

$$\begin{cases} a_k y^{n+k} + a_{k-1} y^{n+k-1} + a_{k-2} y^{n+k-2} + \dots + a_0 y^n = \\ = h(\beta_k f^{n+k} + \beta_{k-1} f^{n+k-1} + \dots + \beta_0 f^n) \\ y^0, y^1, y^2, \dots, y^{k-1}, \text{ κ-δεδομένα} \quad n=0,1,\dots,N-k \end{cases}$$

Θα υποθέσουμε ότι $a_k \neq 0$, έτσι ώστε να έχουμε μια κ-βηματική μέθοδο.

(1) Αμεση κ-βηματική : όταν $\beta_k = 0$
τότε ο προσδιορισμός του y^{n+k} γίνεται με απλή αντικατάσταση των τιμών $y^n, y^{n+1}, \dots, y^{n+k-1}$.

(2) Πεπλ. κ-βηματική : όταν $\beta_k \neq 0$
τότε για τον προσδ. του y^{n+k} πρέπει να λύσω ένα μη-γραμμικό σύστημα

Οι πεπλ. μέθοδοι δίνουν καλύτερα αποτελέσματα

Πλεονεκτ. } (1) Είναι λιγότερο δαπανηρές
Μειονεκτ. } απο τις RKM

Στις άμεσες κ-βημ. μεθόδους απαιτείται σε κάθε βήμα ενός υπολογισμός της f, ενώ στις πεπλ απαιτείται η λύση ενός συστήματος (μη-γραμμικού)
συσ. $m \times m$

Στις πεπλ. RK απαιτείται η λύση ενός συστήματος $(q+1)m \times (q+1)m$

(2) Υστερούν σε ιδιότητες ευστάθειας όσον αφορά τις μεθόδους RK.